Numerische Berechnungen zu Modulformen (-2)-ten Grades

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel

von

Hans Frey
aus Dielsdorf (Schweiz)

Basel, 1971
Druck: A. Schudel & Co. AG, Riehen

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546022_0100

Numerische Berechnungen zu Modulformen (-2)-ten Grades

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel

von

Hans Frey

aus Dielsdorf (Schweiz)

Basel, 1971
Druck: A. Schudel & Co. AG, Riehen

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel, auf Antrag der Herren Professoren Dr. M. Eichler und Dr. W. Habicht.

Basel, den 27. April 1971

Dekan
Dr. H. P. Laubscher

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

§ 1 Einleitung

Gegenstand unserer Untersuchung in der vorliegenden Arbeit sind die Spitzenformen (-2)-ten Grades zur Substitutionsgruppe $\Gamma_0(q)$:

$$\tau \longrightarrow \frac{a\tau + b}{cq\tau + d} \quad (ad-bcq=1, a,b,c,d \equiv 0 \bmod 1)$$

Dabei setzen wir die Stufe q als quadratfrei voraus. Die bei $\Gamma_0(q)$ invarianten Funktionen bilden einen algebraischen Funktionenkörper K_q über dem Körper C der komplexen Zahlen. Das Geschlecht von K_q nennen wir g.

Für die Formen vom Gewicht -2 gilt:

$$(f \circ T)\,\frac{d}{d\tau}T(\tau) = f(\tau), \text{ wenn } T \in \Gamma_0(q).$$

Verschwindet $f(\tau)$ in allen Spitzen eines Fundamentalbereiches von $\Gamma_0(q)$ (Spitzenform), so ist $f(\tau)d\tau$ ein Differential erster Gattung von K_q.

Wir erinnern an die Definition des Hecke-Operators T_n, wobei wir im Folgenden der Einfachheit halber Γ statt $\Gamma_0(q)$ schreiben. Ist $R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, so bilden wir die Gruppen $\Gamma' = R_n^{-1} \circ \Gamma \circ R_n$ und $\overline{\Gamma} = \Gamma \cap \Gamma'$. Für die Zerlegung in rechtsseitige Nebenklassen gelte: $\Gamma_0(q) = \bigcup_{\nu=1}^{b} \overline{\Gamma} M_\nu$

Dann ist durch $\Gamma(\tau) \longrightarrow \Gamma(\tau)T_n = \bigcup_{\nu=1}^{b} \Gamma \circ R_n \circ M_\nu(\tau) = \bigcup_{\nu=1}^{b} \Gamma \circ B_\nu(\tau)$

eine Punktkorrespondenz T_n von K_q zu sich selbst definiert.

Wie wir noch zeigen werden, existiert das folgende einfache Repräsentantensystem der Nebenklassen $\Gamma \circ B_\nu$:

$B_\nu = \begin{pmatrix} u & v \\ o & w \end{pmatrix}$: $uw=n$; $(u,q)=1$; $w>o$; v durchläuft ein Repräsentantensystem der Restklassen mod w.

Dann wird die Punktkorrespondenz T_n vermöge

$f(\tau)/T_n = \sum_{u,v,w} f\left(\frac{u\tau+v}{w}\right)\cdot\frac{u}{w}$ im Raume der Spitzenformen dargestellt.

T_n ist der bekannte Hecke-Operator.

Die Spitzenformen vom Gewicht -2 (von hier ab kurz Formen genannt) bilden einen Vektorraum V_q der Dimension g.

Ist $f_i(\tau)$ eine Basis von V_q, so erhalten wir ein Gleichungssystem

$$f_i(\tau)/T_n = \sum_{k=1}^{g} t_{ik}(n) f_k(\tau).$$

Für $(n,q)=1$ wurde die Spur dieser Darstellung von M. Eichler berechnet

$$Sp(T_n) = \sum_{t/n} t - 2^{k-1} \sum_{\substack{t/n \\ t \le \sqrt{n}}} \min\left(t, \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{2} \sum_{s,f} \prod_{p/q} \left(1 + \left\{\frac{(s^2-4n)f^2}{p}\right\}\right) \cdot \frac{h((s^2-4n)f^{-2})}{w((s^2-4n)f^{-2})}$$

$$+ \begin{cases} o & \text{für } \sqrt{n} \neq o \bmod 1 \\ -2^{k-1}\sqrt{n} + \frac{1}{12}\prod_{p/q}(p+1) & \text{für } \sqrt{n} = o \bmod 1 \end{cases} \qquad (1)$$

summiert über: $-2\sqrt{n} \le s \le 2\sqrt{n}$, $o < f$, $(s^2-4n)f^{-2} \equiv o$ oder $1 \bmod 4$.

Dabei bedeutet $\left\{\frac{\Delta}{p}\right\}$ ein modifiziertes Legendre-Symbol, $h(\Delta)$ die Idealklassenzahl und $w(\Delta)$ die halbe Einheitenanzahl der Ordnung mit der Diskriminante Δ im quadratischen Zahlkörper $Q(\sqrt{\Delta})$. k ist die Anzahl Primfaktoren von q.

Wir haben für verschiedene Stufen q und kleine n obige Spuren numerisch berechnet (vgl. Tabelle 1).

Weitere Aufgabe dieser Arbeit ist es, mit diesen Spuren $Sp(T_n)$ als Koeffizienten eine Modulform zu bilden und durch Anwenden der Operatore T_n darauf eine Basis eines Unterraumes U_q von V_q zu bilden. Dieser Unterraum U_q wird uns als Darstellungsraum für die Operatoren $T_n=(t_{ik})(n)$ dienen. Die erwähnte Basis von U_q und die Darstellungsmatrizen $(t_{ik})(n)$ werden ebenfalls numerisch berechnet. Zum Schluss werden wir diese Darstellungsmatrizen auf ihre Zerfällung untersuchen.

§ 2 Das Repräsentantensystem der Nebenklassen ΓB_ν.

Zuerst wollen wir das in der Einleitung erwähnte Vertretersystem für die Nebenklassen $\Gamma_o R_n M_\nu = \Gamma_o B_\nu$ herleiten.

Wegen $M_\nu=\begin{pmatrix} a & b \\ cq & d \end{pmatrix} \in \Gamma_o(q)$ und $R_n=\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & n \end{pmatrix}$ gilt: $B_\nu=\begin{pmatrix} a & b \\ cqn & dn \end{pmatrix}$, wobei wegen $ad-bcq=1$ $(a,q)=(d,q)=1$ ist.

Deshalb lässt sich in jeder Restklasse $\Gamma_o B_\nu$ leicht ein $A \in \Gamma_o(q)$ bestimmen, so dass $AB_\nu = A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ o & d_1 \end{pmatrix}$ mit $(a_1,q)=1$.

Zwei solche Vertreter A_1 und $A_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ o & d_2 \end{pmatrix}$ sind in der gleichen Restklasse $\Gamma_o B_\nu$, wenn es ein $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma q & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_o(q)$ gibt mit: $AA_1=A_2$.

Weil daraus sofort $\gamma=o$ und damit $\alpha=\delta=1$ folgt, ist $a_1=a_2, d_1=d_2$ und $b_1 \equiv b_2 \bmod d_1$.

Da für $\tau = i\infty$ die Punkte τ und $\tau + 1$ bei $\Gamma_o(q)$ aequivalent sind, lassen sich die Spitzenformen in $i\infty$ wie folgt in eine Fourierreihe entwickeln:

$$f(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi i m \tau}$$

Die Koeffizienten d_m von $f(\tau)/T_n = \sum_{m=1}^{\infty} d_m e^{2\pi i m \tau}$ erhält man nach kurzer Rechnung wie folgt:

$$\boxed{d_m = \sum_{\substack{u \cdot w = n \\ u \mid m \\ (u,q)=1}} c_w \cdot \frac{m}{u} u} \qquad (2)$$

§ 3 Die Teiler der Modulformen; die Grundformen

Für die weiteren Ueberlegungen teilen wir die Formen $f(\tau)$ in Teilscharen auf, wie folgt:

Eine Form $f_t(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi i m \tau}$ heisse vom Teiler t (t/q), wenn für alle $c_m \neq o$ gilt: $t/(m,q)$.

Im Raume V_q der Spitzenformen sondern wir zunächst den grössten Unterraum U_q^t der Spitzenformen vom Teiler t=q aus. Im Restraum suchen wir für jeden grössten echten Teiler von q die maximalen Unterräume U_q^t der Formen vom Teiler t. Wir fahren sinngemäss so fort und erhalten zum Schluss die Zerlegung:

$$V_q = \bigoplus_{t/q} U_q^t$$

Dabei kann durchaus für gewisse t $\dim(U_q^t) = o$ sein.

Die Teilräume U_q^t gehen nicht bei allen Operatoren T_n in sich über, denn es gilt der

Satz 1: Der Operator T_n führt eine Form vom Teiler t in eine Form vom Teiler $t' = \frac{t}{(n,t)}$ über.

Speziell gilt damit: Formen vom Teiler t=1 gehen bei allen T_n wieder in Formen vom Teiler t=1 über.

Der Beweis ergibt sich durch eine einfache Anwendung der Formel (2).

Da der Unterraum U_q^1 der Formen vom Teiler t=1 bei allen T_n in sich abgebildet wird, lässt sich auch U_q^1 als Darstellungsraum für die T_n benützen. In diesem Fall bezeichnen wir die Dimension von U_q^1 mit g_1, die Darstellungsmatrix von T_n mit $(t_{ik})_q^1(n)$ und die Spur davon mit $Sp_q^1(T_n)$. Für konstantes q lassen wir den Index q auch weg.

Ein Raum U_q^t lässt sich nach Satz 1 nur für Operatoren T_n mit (n,t)=1 als Darstellungsraum verwenden.

Nach Hecke lässt sich die Darstellung der T_n im Raum U_q vollständig ausreduzieren. Sind

$$\psi_i(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(i)} e^{2\pi i m \tau} \qquad (c_1^{(i)} = 1 \text{ normiert})$$

die Eigenfunktionen, so zeigt Formel (2) für die Eigenwerte der T_n

$$\lambda_n^{(i)} = c_n^{(i)} \qquad (3)$$

Die Spuren sind dann einfach: $Sp_q^1(T_n) = \sum_{i=1}^{g_1} \lambda_n^{(i)}$

Damit haben wir in $\psi(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} Sp_q^1(T_m) e^{2\pi i m \tau}$ eine Modulform aus U_q^1 gefunden. Wir werden sie als Grundform bezeichnen.

Ist jedoch $\varphi(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mt} e^{2\pi i m t \tau}$ eine Eigenfunktion von T_n vom Teiler $t>1$ ($c_t=1$), so gilt statt (3):

$$\lambda_n = c_{nt} \qquad (4)$$

Ein Vergleich von (3) und (4) zeigt uns, dass $\sum_{m=1}^{\infty} Sp(T_m) e^{2\pi i m \tau}$ nicht notwendig eine Modulform ist.

Im nächsten Paragraphen zeigen wir für festes n, wie man $Sp_q^1(T_n)$ auf einfache Weise aus den Spuren $Sp_t(T_n)$ berechnen kann.

§ 4 Die Koeffizienten der Grundform

Wie wir in § 3 festgestellt haben, zerfällt der Raum V_q in die direkte Summe der Unterräume U_q^t für die verschiedenen Teiler t von q. Nach Satz 1 können alle Unterräume U_q^t mit $(t,n)=1$ als Darstellungsräume für ein T_n dienen. Für $(n,q)=1$ zerfällt die Darstellung eines T_n in die Summe der Darstellungen von T_n in den Unterräumen U_q^t. Bezeichnen wir die Spuren dieser Darstellungen mit $Sp^t(T_n)$, so erhalten wir die Formel

$$Sp(T_n) = \sum_{t/q} Sp^t(T_n) \quad \text{für } (n,q)=1 \qquad (5)$$

und damit $$Sp^1(T_n) = Sp(T_n) - \sum_{\substack{t/q \\ t>1}} Sp^t(T_n) .$$

$Sp^t(T_n)$ lässt sich aber leicht nach folgendem Satz berechnen:

Satz 2: Ist $Sp_q^t(T_n)$ die Spur der Darstellung von T_n im Raume U_q^t, so gilt für alle zu t teilerfremden n:

$$Sp_q^t(T_n) = Sp\,{}^1_{\frac{q}{t}}(T_n) \qquad (6)$$

Bekanntlich ist für q_i aus der Menge M=(1,2,3... 10,13) das Geschlecht von K_{q_i} gleich Null. Gilt also $q_i=\frac{q}{t}\in M$, für alle $t\neq 1$, so folgt

$$Sp_q^t(T_n) = Sp\,{}^1_{\frac{q}{t}}(T_n) = Sp\,{}_{\frac{q}{t}}(T_n) \qquad (7)$$

Damit gilt:

$$Sp_q^1(T_n) = Sp_q(T_n) - \sum_{\substack{t/q\\ t>1}} Sp_{\frac{q}{t}}^1(T_n)$$

und

$$g_1 = g - \sum_{\substack{t/q\\ t>1}} \dim(V_{\frac{q}{t}})$$

Aus dem folgenden Beweis entnehmen wir noch, dass wir in (5) nicht (n,q)=1 voraussetzen müssen, vielmehr genügt es zu verlangen: (n,t)=1 für alle t mit $\frac{q}{t}\notin M$.

Beweis: Zuerst überlegen wir uns, dass eine Form f_t zu $\Gamma_0(q)$ sogar Form zur Gruppe $\Gamma_t(q)\geq\Gamma_0(q)$ aller Matrizen $\begin{pmatrix} a & b/t \\ cq & d \end{pmatrix}$ mit $ad-bc\cdot\frac{q}{t}=1$, a,b,c,d=o mod 1 ist. Weil f_t auch Form zu $T_1=\begin{pmatrix} 1 & 1/t \\ o & 1 \end{pmatrix}$ ist und $\Gamma_t(q)$ durch T_1 und $\Gamma_0(q)$ erzeugt wird, ist f_t Form zu $\Gamma_t(q)$. Sei $T=\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & t \end{pmatrix}$. Wegen $\Gamma_0\left(\frac{q}{t}\right) = T^{-1}\circ\Gamma_t(q)\circ T$ ist $f_t(\tau)/T = f_t\left(\frac{\tau}{t}\right)$ Form vom Teiler 1 zu $\Gamma_0\left(\frac{q}{t}\right)$. Umgekehrt ist für eine Form f vom Teiler 1 zu $\Gamma_0\left(\frac{q}{t}\right)$ f/T^{-1} Form vom Teiler t zu $\Gamma_t(q)$. T vermittelt also einen Isomorphismus zwischen U_q^t und $U_{\frac{q}{t}}^1$.

Ein Vergleich mit Formel (2) zeigt, dass wegen der Bedingung $(u,q)=1$ $(f_t/T)/T_n=(f_t/T_n)/T$ genau für $(n,t)=1$ gilt. Dann sind die Operatoren T und T_n also vertauschbar und es ist $Sp_q^t(T_n)=Sp_{\frac{q}{t}}^1(T_n)$.

Zusammengefasst haben wir erhalten:

1. Für festes q können wir aus den Spuren der T_m eine Grundform vom Teiler t=1 (und nur für diesen) bilden: $f(\tau)=Sp_q^1(T_m)e^{2\pi im\tau}$

2. $Sp_q^1(T_m)$ lässt sich nur für $(m,t)=1$ (wenn t alle Teiler von q mit Geschlecht von $K_{\frac{q}{t}} > o$ durchläuft) nach (5) berechnen.

Wir erwähnen noch, dass nach Satz 2 für $(n,t)=1$ die Zerfällung der Darstellungsmatrizen $(t_{ik})_q^t(n)$ der Zerfällung der Matrizen $(t_{ik})_{\frac{q}{t}}^1(n)$ entspricht. Für $(n,q)=1$ erhalten wir damit die Zerfällung der ganzen Matrix $(t_{ik})(n)$.

§ 5 Berechnung der Darstellungsmatrizen $(t_{ik})_q^1(n)$ und deren rationalen Eigenwerte

Gegeben die Grundform $f_1(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi im\tau}$, wobei wir für $(m,q)=1$ die Koeffizienten $c_m=Sp_q^1(T_m)$ berechnet haben.

Wir bilden die g_1 Formen

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1/T_{n_2} \\ f_3 &= f_1/T_{n_3} \\ &\dots \\ f_{g_1} &= f_1/T_{n_{g_1}} \end{aligned} \qquad (8)$$

wobei $T_{n_2} \cdots T_{n_{g_1}}$ die ersten (g_1-1)Operatoren sind, für die gilt: $(n_i,q)=1$, $n_i \geq 2$ und $f_1 \cdots f_{g_1}$ linear unabhängig. Dann bilden $f_1 \cdots f_{g_1}$ $(f_i = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(i)} e^{2\pi i m \tau})$ eine Basis für den Raum U_q^1, den wir als Darstellungsraum für die Operatoren T_n verwenden. Für $(m,q)=1$ haben wir die $c_m^{(i)}$ wiederum berechnet.

Die Darstellungsmatrix $(t_{ik})_q^1$ von $T_n((n,q)=1)$ ergibt sich jetzt wie folgt:

Ist $f_i(\tau)/T_n = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(i)} \cdot e^{2\pi i m \tau}$, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die t_{ik}:

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(i)} e^{2\pi i m \tau} = \sum_k t_{ik} \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(k)} e^{2\pi i m \tau} \right)$$

Daraus haben wir die Darstellungsmatrix $(t_{ik})_q^1(n)$ von T_n berechnet. Eine Möglichkeit der Kontrolle ergibt sich im Vergleich der Spuren der oben berechneten Matrizen mit den aus (1) und (7) berechneten Werten $Sp_q^1(T_n)$.

Der Ring, der durch die $(t_{ik})_q^1(n)$ erzeugt wird, ist nach Hecke eine direkte Summe einfacher Ringe. Unter diesen treten direkte Summanden auf, die mit dem Ring Z der ganzen Zahlen isomorph sind. Ihre Anzahl nennen wir A_q.

Es folgt: Jede Matrix $(t_{ik})_q^1(n)$ hat mindestens A_q rationale, nicht notwendig verschiedene Eigenwerte. Ausnahmsweise können aber auch weitere direkte Summanden entstehen, so dass weitere rationale Eigenwerte (mit einer Vielfachheit grösser 1) auftreten. (Vgl. Tabelle 2)

Um die rationalen Eigenwerte von $(t_{ik})^1_q(n)$ zu bekommen, berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\chi(x)=\det\left[(t_{ik})^1_q(n)-Ex\right]=(-1)^{g_1}x^{g_1}+a_{g_1-1}x^{g_1-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

wobei die Koeffizienten a_i ausnahmslos ganz werden. Für eine Nullstelle x_i von $\chi(x)$ gilt dann: x_i ist ganz und $x_i/\det(t_{ik})^1_q(n)=a_0$.

Wir fügen folgende drei Bemerkungen an:

1. Spaltet man die Linearfaktoren von $\chi(x)$ ab, so kann das Restpolynom im rationalen Zahlkörper weiter zerfallen.

2. Ausser der oben erwähnten Kontrolle haben wir noch folgende zwei Kontrollmöglichkeiten:

   a) Die aus (1) berechneten Spuren sind alle ganzrational.

   b) g_1+1 nach (8) berechnete Formen sind linear abhängig.

3. Die quadratfreien Stufen q von 1 bis 107 wurden, mit Ausnahme von q=42, 62, 66, 70, 74, 78, 82, 86, 94, 102, 105 und 106, untersucht. Dabei hängt der Rechenaufwand nicht nur von der Grösse von q, sondern auch stark von den Primfaktoren von q ab [wegen der Bedingung (n,q)=1, vgl. Tabelle 1]. Aus diesem Grunde sind für grosse q nur noch die Primzahlstufen berücksichtigt worden, da der Rechenaufwand für die nicht primen q zu gross geworden wäre.

Wir erwähnen noch, dass die numerischen Berechnungen mit Hilfe der IBM 1620 und Univac 1108 Computer in Fortran 2 durchgeführt wurden. Die Programme und eventuell weiteres Zahlenmaterial (Spuren, Basis (8) und Darstellungsmatrizen für weitere Operatoren T_n) sind beim Verfasser noch vorhanden.

Adresse: Hans Frey
Im oberen Brühl 6
4132 Muttenz BL
Schweiz

Tabelle 1

Liste der nach Formel (1) und (6) gerechneten Spuren von T_n in U_q^1, wobei wir uns auf die n mit den Teilern 1,2,3,5 oder 7 beschränken können. Immer ist (n,q) = 1. Waagrecht sind die n abgetragen, senkrecht die Stufen q.

Zur Berechnung der Spuren $Sp_q(T_n)$ beachte man Formel (6) und (7), wonach gilt:

$$Sp_q(T_n) = Sp_q^1(T_n) + Sp_{q/t}^1(T_n).$$

Bei uns tritt höchstens ein Teiler q/t von q mit $\dim(V_{q/t}) > 0$ auf. In diesem Fall ist er in Tabelle 2 hinter der Stufe q in Klammern angegeben.

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	12	14	15	16	18	2o	21
11	1	-2	-1	2	1	2	-2	o	-2	-2	-2	4	-1	-4	4	2	2
14	1		-2		o				1				o				
15	1	-1		-1			o	3				o		-1			
17	1	-1	o	-1	-2	o	4	3	-3	2	o	-4	o	-1	3	2	o
19	1	o	-2	-2	3	o	-1	o	1	o	4	o	-6	4	o	-6	2
21	1	-1		-1	-2			3		2				-1		2	
22	1		-1		1		-2		-2				-1				2
23	2	-1	o	-1	-2	-5	2	o	4	6	5	4	-1o	-3	-2	-4	-1o
26	2		-2		-4		o		4				o				-4
29	2	-2	2	2	-2	-6	o	-6	o	2	1o	8	-2	6	-8	-2	-8
30	2						-4										
31	2	1	-2	-1	2	-6	-4	o	6	1	-4	3	-2	-3	13	-1	-6
33	2	-1		1	-1		2	-3		-4		8		-5		4	
34	2		-2		-2		o		-2				o				8
35	3	-1	o	3		-8		-9	1		4			7	7		
37	2	-2	-2	o	-2	6	-2	o	4	4	-8	2	6	o	-12	-4	2
38	3		-2		-1		1		-3				-2				-2
39	3	-1		1	2		-4	-9		-6		4		5		14	
41	3	-1	o	5	-2	-6	6	-9	-1	-1o	-4	4	6	13	11	6	-8
43	3	-2	-2	2	o	o	-4	o	-1	4	-4	4	12	-12	-2	-8	-4
46	3		o		2		-2		1				-1o				-1o
47	4	1	o	3	-2	-8	4	-3	2	-8	-11	-5	-2	5	16	o	4
51	4	-2		2	4		o	-6		-8		-4		6		12	
53	4	-2	o	o	-2	o	o	o	8	-4	-2	-2	-8	-4	-6	1o	1o

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1o	12	14	15	16	18	2o	21
55	4	1	-1	3		-6	-6	3	5		-18	o		1	11		2
57	4	-3		1	-1		-3	-3		2		4		-5		-8	
58	4		-2		-4		-4		4				6				o
59	5	o	-2	8	2	-4	2	-6	5	-8	-22	-18	-9	10	-2	6	15
61	4	o	o	o	-4	-2	-2	6	4	-6	-8	-4	4	-4	4	4	-1o
65	5	-3	o	3		o	4	-3	1		-4	-8		-5	-11		4
67	5	-2	-4	4	o	o	-2	-6	-1	6	-4	2	2	6	12	-2	-4
69	5	o		4	-4		2	-3		-4		-8		-6		-10	
71	6	-1	o	7	2	o	4	-9	8	-2	-16	-16	-16	-3	-22	-1	2
73	5	-1	-2	5	-2	-4	-6	-3	-1	2	-2	1o	8	9	-3	-22	8
77	6	-1	1	3	-3	-6		-3	9	-4	6		-3	1	-15	-12	
79	6	-1	o	1	4	o	-6	3	8	-4	-8	2	-1o	-13	-23	9	-6
83	7	o	o	6	o	-6	o	6	1	-4	-8	-12	-4	o	-1o	-18	1
85	6	-2	o	2		-4	-4	-6	6		4	8		-6	2		-8
87	7	1		7	o		o	-3		-8		-4		-1		-24	
89	7	-1	-2	9	-4	o	6	3	1	-4	-16	-8	6	9	-15	-28	-4
91	7	-1	-4	3	2	o		3	3	2	-8		-4	-9	-9	-2	
93	7	-2		4	-4		-4	-9		-3		9		6		-1	
95	8	-1	2	7		-4	3	-9	12		o	-12		5	-29		-14
97	7	-1	-4	7	-2	2	-4	-3	-1	-4	-14	2	-2	19	7	-6	8
1o1	8	o	2	1o	-4	-6	o	-6	1o	-4	o	-1o	4	26	-24	-26	-4
1o3	8	1	-2	9	o	o	-4	3	4	-8	-16	-6	-6	15	3	-6	-12
1o7	8	-2	o	2	-2	-2	-2	-6	4	-4	1o	6	8	-6	-2	-8	-18

n:	24	25	27	28	3o	32	35	36	4o	42	45	48	49	5o	54	56	6o
11	o	-4	5	-4	2	8	-2	-4	o	-4	-2	4	-3	8	-1o	o	-2
14		-5	4								o						
15				o		-5							-7			o	
17	o	-1	o	-4	o	-5	-8	3	-6	o	6	o	9	1	o	12	o
19	o	4	4	2	o	o	-3	-2	o	o	3	-8	-6	o	o	o	12
21		-1				-5			-6					1			
22		-4	5				-2				-2		-3				
23	1o	2	o	-6	1o	9	8	-2	-1o	o	-4	-15	-2	-11	5	-1o	o
26		o	-14				2				o		-12				
29	-1o	-8	2	-16	6	6	o	16	6	16	o	6	2	8	2	8	-1o

n:	24	25	27	28	30	32	35	36	40	42	45	48	49	50	54	56	60
79													2				
81	10	-8	-20	7	-6	-9	-4	7	0	2	6	18	4	-4	-20	-10	-4
83		-8		-6		13	-10		6				6	7		-12	
85		-6	4				-8				6		18				
87	-4		-12			-9		3				28			12		
89	0	-6	-14	0	-12	8	2	16	0	-6	-12	16	-12	2	18	0	12
91		10	4				-15				11		-10				
93		5		-12		11	-24		-14				11	-7		20	
95	-2	-3	-6	14	10	-29	-10	-11	-14	-20	-10	24	-1	13	14	-16	18
97	5	13	4	0	-24	8	-12	2	8	8	-8	8	-9	-38	8	-8	16
99		13	0				-8				-16		7				
101	-13	16	-12	16	10	10	-20	11	-14	-15	-34	6	2	15	-5	2	46
103		6		4		-14	-20		-28				4	-26		12	
105	-4	-8	6	16	2	-2	8	-28	-4	-16	-24	16	4	2	16	-22	20
107	-6		5	-8		7		9		12		4	-16		-26	-12	
109		3		-2		21	15		6				7	-1		0	
111		-8	-2				4				-20		-4				
113	6	7	-11	-2	14	-2	-9	42	-18	34	1	-54	1	8	-26	-38	-28
115	-10	8	12	4	-6	-8	8	-12	0	0	-24	12	-16	-16	16	8	16
117	4		12	28		1		-1		-4		-8	13		-20	-32	
119	-6	15	2	-26	-10	-14	6	-20	28	8	-12	2	-5	-38	-6	38	-18
121		-1		2		14	16		-20				-7	4		-14	
123	11	12	-12	22	7	-9	-20	31	10	-6	2	-5	30	17	56	-6	-39
125	2	-7	4	-14	0	-17	14	-23	10	0	6	-20	-11	1	10	6	12
127	-16	-7	7		18	13		5	6		-28	-8		7	-34		-22
129	-2	10	12	-14	4	0	4	19	1	26	26	2	-4	-18	-16	-14	-30
131	-20	13	15	12	16	12	-4	-6	-24	14	14	8	13	36	14	-32	-2
133	8		-12	-16		6		-22		4		-24	-2		-20	28	
135		11		-6		5	-4		-16				3	53		32	
137	-14	-1	4	14	0	15	4	31	-8	16	-26	-46	15	19	16	-8	60
139	-4	15	-4		8	15		-9	-10		22	12		1	48		-20
141		-1		-19		-20	4		-6				5	25		18	
143	-28		8	6		-9		27		16		40	25		0	4	
145	2	-9	2	-6	14	-27	8	-19	-20	-12	12	-40	-7	-21	-18	50	4
147	-42	-4	14	4	-4	-2	0	32	-6	10	-16	24	2	38	0	-18	-2
149	-30	-2	10	-13	0	12	8	-9	-2	22	14	-54	-14	13	8	-7	14
151	-10	6	6	-10	0	16	-14	-18	12	16	-8	2	10	0	-14	-12	0

n:	63	64	7o	72	75	8o	81	84	85	9o	96	98	1oo	1o5	1o8	112	12o
11	4	-8	4	o	4	-4	1	4	-2	4	-8	6	-8	2	1o	8	o
14					1o		-11		o								
15		7										7				o	
17	-12	7	8	-9	o	2	9	o	-2	-6	o	-9	1	o	o	-4	o
19	-1	-8	o	o	-8	12	-11	-4	-9	o	o	o	-8	6	-8	-4	o
21		7				2			12				1				
22	4				4		1		-2					2			
23	4	4	-4	o	2o	18	-22	1o	-16	12	-5	11	9	o	-5	12	-1o
26	8				16		1o		12					6			
29	-16	-14	-8	-8	-8	-6	-2	-24	4	8	2	-2	-8	8	-6	o	1o
3o																	
31	8	4	3	-2o	8	-3	22	8	6	13	4	-18	4	-6	o	-9	1o
33		-1	-4			-2			2			15	-7			4	
34	-16				1o		-2		-2					o			
35		-1		-5			-13				-4				-16		
37	-4	-16	-4	o	-2	8	1o	8	o	24	-24	12	8	-6	-8	o	o
38	-5				-24		-9		-21					18			
39		-7	8			-2			-28			7	7			4	
41	4	13	-3o	23	-16	34	-13	-12	4	2	2	35	3	28	-2	2	-14
43	4	8	16	o	-6	o	-21	o	24	12	-16	-2	22	-16	8	16	16
46	16				2o		-13		-24					o			
47	16	-31	-3o	27	24	-12	4	-19	-2	-3o	26	-15	-39	-6	-33	3	3o
51		6	8			44			-2			-2	26			-2o	
53	-44	-4	-16	38	28	-1o	44	-2	-6	2o	8	-3o	-8	12	-24	-12	-14
55	-16	-15		39			12	36			-16	-7			-22	-4	
57		-17	-36			22			9			-47	-7			4	
58	-24				-16		8		24					-8			
59	-12	18	-24	28	8	5o	-3	28	4o	-8	42	24	-38	-23	-2o	-18	5o
61	-18	-4	4	-1o	4	-16	-12	22	-3o	1o	34	2	-12	3o	-4	-14	38
65	-4	-5		21			-19	-28			32	-51			36	-4	
67	16	o	-46	22	-26	-68	-11	3o	46	4	38	-24	26	22	34	-3o	-2
69		-15	-4			2o			4			-12	2o			12	
71	-14	-23	-32	-55	-4	12	6	32	-1o	3	5o	31	-11	22	-51	-8	54
73	-1o	7	-1o	39	4	-34	-3	-4	-22	-22	18	-15	21	-12	34	-38	12
77		-43		-23	16	1o	22		-26	42	32		-13		1o2		32
79	-42	-1	-2	21	-42	-6	3o	2	26	-54	8	-3	1	1o	12	48	16
83	-5	16	-16	4	-44	-58	-33	38	8	-8	-14	-32	42	-54	1o	-36	68

n:	63	64	7o	72	75	8o	81	84	85	9o	96	98	1oo	1o5	1o8	112	12o
85	-24	2		-2			46	o			12	-38			6o	-4	
87		-15	-28			-32			-32			-11	27			18	
89	2o	25	-18	-31	-22	-52	-17	-48	-26	18	8	-41	9	4	-2	46	34
91		-17		-1	-48	-38	-9		-8	-5o	-4		1		o		16
93		-13	17			9			1o			-43	-43			-35	
95	-13	-23		-65			4	-28			-28	23			28	-32	
97	-1o	49	-12	-3	14	2o	-17	-18	o	-8	32	-1	-23	6	66	-4o	16
1o1	-14	58	2o	-82	2o	-42	-4o	12	-38	16	-118	18	-16	-42	86	-88	8o
1o3	-16	65	-16	43	-14	-4o	o	64	2	-26	-18	2o	-41	-38	6	-8o	14
1o7	4	-2o	28	-12	-26	-4	o	-28	-42	-5o	22	-32	16	1o	-26	-8	-42

n:	125	126	128	135	14o	144	147	15o	16o	162	168	175	18o	189	192	196	2oo
15			3													7	
17	12	12	3	o	8	3	o	o	1o	-9	o	-4	-6	o	o	-9	-3
19	-3	o	o	12	6	4	12	o	o	o	o	-4	-6	-4	16	12	o
23	-12	8	-25	1o	-4	-6	-2o	-15	-4	11	1o	-18	-8	1o	1o	-9	2o
29	18	16	1o	-2	16	o	2	24	-6	26	32	o	-16	8	-22	2	24
3o																	
31	-18	-1	25	-2o	7	-39	36	24	-9	41	-1o	16	7	2o	-14	-22	o
53	o	44	36	-48	12	36	-4o	-12	24	-24	32	4	28	18	-5o	2o	4
57	3		-3		42				-26			-36				59	3
58	12			3o			14					o		16			
59	3	-86	-46	17	36	4o	-23	66	-22	66	11o	15	42	21	-2	38	-8o
61	24	-4	-3o	-52	-1o	28	28	12	22	-12	8	4	28	-24	-4	-2o	2o
67	3o	-3o	-16	24	68	-8	-8	2o	42	-54	-22	22	6o	-14	22	38	16
69	-24		-28		2o				26			-26				-12	55
71	36	-78	44	-24	-72	49	4o	-49	-55	-44	3o	6	73	-5o	2	39	38
73	o	-18	-21	-2o	4o	-21	-12	6	5o	-3	o	1o	54	-4	46	-9	-27
79	6	58	-15	-16	-38	-67	52	84	3o	-85	-26	24	43	-98	52	-5	5
83	36	-12	38	26	18	12	2o	-34	-52	2o	-42	-32	-12	-69	-6o	-26	42
85		4	1o			1o	2o			-6	-12			o	36	18	
87	6		25		-8				-24			8				13	85
89	30	-24	71	1o	-76	35	-4o	-1o	-88	-5	2o	58	-42	-24	-44	-67	71
91	36		-41	-36		-5		-4	2	-53			54		28		-47

n:	125	126	128	135	14o	144	147	15o	16o	162	168	175	18o	189	192	196	2oo
93	-66		42		-3				31			16				13	57
95		-4	-33			97	64			-49	24			-92	96	-67	
97	-36	4	-111	14	-18	37	-26	-14	-24	-15	-72	26	-8	4o	-66	-31	83
lol	-6	-12	lo	-22	48	loo	2o	48	-42	-34	74	-22	-42	-2o	132	-8o	3o
lo3	6	-68	67	-18	-8	29	18	26	2	5	58	58	-14	-74	-118	-37	-5
lo7	-36	42	2	4o	-8	2o	-32	-4o	-4	4o	34	52	98	-24	-7o	-16	-58

Tabelle 2

Darstellungsmatrix und Eigenpolynom von $T_n = T(n)$.

Hinter der Stufe q geben wir, falls notwendig, in Klammern die Stufen q/t mit dim $U_{\frac{q}{t}} \neq 0$ an. g ist das Geschlecht von K_q und $g_1 = \dim\left(U_q^1\right)$. Im allgemeinen geben wir die Darstellungsmatrix $(t_{ik})_q^1(n)$ von T_n für das kleinste n mit $(n,q)=1$. Darunter folgt das charakteristische Polynom $\chi(x)$ mit seinen rationalen Nullstellen x_i. Hat das Restpolynom den Grad 4 od. 5, so folgt für $\chi(x)$ die Primfaktorzerlegung.

Treten für eine Stufe q Operatoren T_n mit mehrfachen Eigenwerten auf, so geben wir auch diese an.

max bezeichnet das grösste n, für das T(n) untersucht wurde.

Beispiel

Stufe q = 33.

Geschlecht g = 3, $\dim\left(U_q^1\right) = g_1 = 2$

$Sp_{33}(T_2) = Sp_{33}^1(T_2) + Sp_{11}(T_2) = -1 + (-2) = -3$

Der Operator T(2) besitzt zwei Eigenwerte, nämlich $x_1=1$ und $x_2=-2$. Untersucht wurden T(2) bis T(2o). Darunter haben T(1o), T(14), T(17) T(19) und T(2o) doppelte Eigenwerte, z.B. T(1o) die Doppelwurzel $x_1=x_2=-2$.

Für q=11,14,15,17,19,21 ist g=1.

Für q=22 ist g=2 und $g_1=1$.

q=23: $g=g_1=2$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ T(9): $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=x^2+x-1$ irreduzibel

T(9): $\chi(x)=x^2-4x+4$ $x_1=x_2=2$

Weitere doppelte Nullstellen für T(13), T(14), T(19), T(20).

T(max)=T(22)

q=26: $g=g_1=2$

T(3): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=x^2+2x-3$ $x_1=1$ $x_2=-3$

T(max)=T(9)

q=29: $g=g_1=2$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ T(5): $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=x^2+2x-1$ irreduzibel

T(5): $\chi(x)=x^2+2x+1$ $x_1=x_2=-1$

Weitere doppelte Nullstellen für T(16), T(19), T(22).

T(max)=T(22)

q=30: $g=3$ $g_1=2$ (15)

T(7): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=x^2+4x$ $x_1=0$ $x_2=-4$

T(max)=T(7)

g=31: $g=g_1=2$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ T(5): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=x^2-x-1$ irreduzibel

T(5): $\chi(x)=x^2-2x+1$ $x_1=x_2=1$

Weitere doppelte Nullstellen für T(11) und T(12).

T(max)=T(22)

g=33: $g=3$ $g_1=2$ (11)

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ T(10): $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=x^2+x-2$ $x_1=1$ $x_2=-2$

T(10): $\chi(x)=x^2+4x+4$ $x_1=x_2=-2$

Weitere doppelte Nullstellen für T(14), T(17), T(19) und T(20).

T(max)=T(20)

g=34: $g=3$ g_1 (17)

T(3): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=x^2+2x$ $x_1=0$ $x_2=-2$

T(max)=T(9)

g=35: $g=g_1=3$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ T(6): $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=-x^3-x^2+4x$ $x_1=0$

T(6): $\chi(x)=-x^3-8x^2-16x$ $x_1=0$ $x_2=x_3=-4$

T(max)=T(9)

q=37: $g=g_1=2$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ T(7): $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=x^2+2x$ $x_1=0$ $x_2=-2$

T(7): $\chi(x)x^2+2x+1$ $x_1=x_2=-1$

T(max)=T(22)

q=38: $g=4$ $g_1=3$ (19)

T(3): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\chi(x)=-x^3-2x^2+x+2$ $x_1=1$ $x_2=-1$ $x_3=-2$

T(max)=T(3)

q=39: $g=g_1=3$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=-x^3-x^2+3x-1$ $x_1=1$

T(max)=T(5)

q=41: $g=g_1=3$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=-x^3-x^2+5x+1$ irreduzibel

T(max)=T(1o)

q=43: $g=g_1=3$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ T(4): $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

T(2): $\chi(x)=-x^3-2x^2+2x+4$ $x_1=-2$

T(4): $\chi(x)=-x^3+2x^2$ $x_1=x_2=0$ $x_3=2$

Weitere doppelte Nullstellen für T(6) und T(9).

T(max)=T(10)

q=46: $g=5$ $g_1=3$ (23)

T(3): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=-x^3+5x$ $x_1=0$

T(max)=T(3)

q=47: $g=g_1=4$

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\chi(x)=x^4-x^3-5x^2+5x-1$ irreduzibel

T(max)=T(5)

q=51: $g=5$ $g_1=4$ (17)

T(2): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -1\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -1\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\chi(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x$ $x_1=0$ $x_2=-1$

T(max)=T(2)

g=53: $g=g_1=4$

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad T(6):\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

T(2): $\chi(x)=x^4+2x^3-2x^2-4x-1$ $\quad x_1=-1$

T(6): $\chi(x)=x^4-6x^2-8x-3$ $\quad x_1=3 \quad x_2=x_3=x_4=-1$

T(max)=T(7)

g=55: $g=5 \quad g_1=4$ (11)

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=x^4-x^3-5x^2+3x+2$ $\quad x_1=1 \quad x_2=-2$

T(max)=T(4)

g=57: $g=5 \quad g_1=4$ (19)

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -7 & -5 & -2 \end{pmatrix} \qquad T(7):\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 \\ -6 & -11 & -9 & -4 \\ 6 & 10 & 8 & 4 \\ -2 & -8 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad T(8):\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

T(2): $\chi(x)=x^4+3x^3-4x$ $\quad x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=x_4=-2$

T(7): $\chi(x)=x^4+3x^3-13x^2-15x$ $\quad x_1=-5 \quad x_2=-1 \quad x_3=0 \quad x_4=3$

T(8): $\chi(x)=x^4+3x^3$ $\quad x_1=-3 \quad x_2=x_3=x_4=0$

Weitere doppelte Nullstelle für T(4).

T(max)=T(8)

g=58: $g=6$ $g_1=4$ (29)

$$T(3): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1\frac{1}{4} & -1\frac{1}{2} & -1\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1\frac{1}{4} & -2\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=x^4+2x^3-6x^2-10x-3$ $x_1=-3$ $x_2=-1$

T(max)= T(3)

g=59: $g=g_1=5$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & -4 & -2 \\ -6 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=-x^5+9x^3-2x^2-16x+8$ irreduzibel

T(max)=T(4)

g=61: $g=g_1=4$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=x^4-4x^2-2x+1$ $x_1=-1$

T(max)=T(4)

g=65: $g=g_1=5$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,6 & 0,6 & -1,6 & -1,4 & -1,2 \\ -0,8 & -1,2 & 0,2 & -1,2 & -1,6 \end{pmatrix}$$

$\chi(x)= -x^5-3x^4+2x^3+10x^2+3x-3$ $x_1=-1$

$= (-x^2+3)(x^2+2x-1)(x+1)$

T(max)=T(2)

q=67: $g=g_1-5$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -1\frac{1}{2} & 1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 1\frac{1}{2} & -1\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=-x^5-2x^4+5x^3+8x^2-3x-2 \qquad x_1=2$$
$$(-x^2-x+1)(x^2+3x+1)(x-2)$$

T(max)=T(4)

q=69: $g=7$ g_1-5 (23)

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=-x^5+7x^3-x^2-10x+5 \qquad x_1=1$$
$$=(-x^2+5)(x^2+x-1)(x-1)$$

T(max)=T(2)

q=71: $g=g_1=6$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ -9 & 5 & 8 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=x^6+x^5-9x^4-5x^3+23x^2+3x-9$$

T(max)=T(5)

q=73: $g=g_1=5$

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & -4 & -6 \\ -2\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} & -3\frac{1}{2} & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=-x^5-x^4+7x^3+5x^2-7x-3 \qquad x_1=1$$
$$=(-x^2+x+3)(x^2+3x+1)(x-1)$$

T(max)=T(3)

q=77: $g=7 \quad g_1=6 \quad (11)$

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4 & 2,6 & -0,6 & 0,4 & 0,6 & -0,2 \\ -1,2 & -1,2 & 0,2 & -0,8 & -0,2 & -0,6 \\ -0,4 & -2,4 & 1,4 & -1,6 & -1,4 & -1,2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=x^6+x^5-7x^4-5x^3+10x^2 \qquad x_1=1 \quad x_2=-2 \quad x_3=x_4=0$$

$$T(3):\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3,4 & -1,6 & -0,4 & -1,4 & -1,6 & -0,8 \\ -0,4 & -2,4 & -0,6 & -1,6 & -1,4 & -1,2 \\ 0,2 & 1,2 & -1,2 & -0,2 & 1,2 & -0,4 \\ -0,4 & 3,6 & -0,6 & 0,4 & 0,6 & 1,8 \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=x^6-x^5-13x^4+9x^3+36x^2-8x-24 \quad x_1=-3 \quad x_2=-1 \quad x_3=1 \quad x_4=2$$

T(max)=T(3)

q=79: $g=g_1=6$

$$T(2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=x^6+x^5-6x^4-6x^3+8x^2+7x-1$ $\quad x_1=-1$

Restpolynom irreduzibel

T(max)=T(3)

q=83: $g=g_1=7$

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 3 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1\frac{1}{4} & -4\frac{1}{2} & -6\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -5\frac{1}{4} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1\frac{3}{4} & -1\frac{1}{2} & -4\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -3\frac{3}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=-x^7+10x^5+2x^4-27x^3-8x^2+20x+8$ $\quad x_1=-1$

T(max)=T(4)

q=85: $g=7$ $\quad g_1=6$ $\quad$ (17)

$$T(2):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & -\frac{4}{7} & 1\frac{1}{7} & -1\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 1\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

$\chi(x)=x^6+2x^5-5x^4-8x^3+7x^2+6x-3$ $\quad x_1=1$ $\quad x_2=-1$

$=(x^2+2x-1)(x^2-3)(x-1)(x+1)$

q=87: $g=9 \quad g_1=7 \quad (29)$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 35 & -5 & -6 & -19 & -7 & 22 & 17 \\ 26 & -4 & -3 & -14 & -5 & 16 & 12 \\ -20 & 2 & 2 & 11 & 4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}(x)=-x^7+x^6+10x^5-10x^4-26x^3+26x^2+11x-7$$

T(max)=T(2)

q=89: $g=g_1=7$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{9} & 1\frac{8}{9} & -2\frac{2}{3} & -1\frac{2}{3} & -1\frac{1}{9} & -1\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & 1\frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} & 1\frac{2}{9} & 1\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{2}{9} & -1\frac{1}{9} & 3\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}(x)=-x^7-x^6+11x^5+11x^4-31x^3-27x^2+21x+17 \quad x_1=1 \quad x_2=-1$$

Restpolynom irreduzibel

$$T(4): \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & 1\frac{8}{9} & -2\frac{2}{3} & -1\frac{2}{3} & -1\frac{1}{9} & -1\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -1\frac{1}{9} & 1\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ 3\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -2\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} & -1\frac{7}{9} & -\frac{8}{9} & 1\frac{1}{9} \\ -1\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & 2\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & -1\frac{1}{9} \\ -3\frac{1}{9} & -1\frac{5}{9} & 1\frac{2}{3} & 2\frac{2}{3} & 2\frac{4}{9} & 4\frac{2}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} & -1\frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} & -1\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=-x^7+9x^6-13x^5-51x^4+61x^3+123x^2-15x-49 \qquad x_1=x_2=-1$$

Restpolynom irreduzibel

T(max)=T(4)

<u>q=91:</u> $g=g_1=7$

T(2):
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{7} & -1\frac{1}{3} & -\frac{5}{21} & \frac{20}{21} & -\frac{2}{7} & -1\frac{1}{7} & -2\frac{4}{21} \\ -1\frac{3}{7} & -1\frac{1}{3} & \frac{16}{21} & -1\frac{1}{21} & -\frac{2}{7} & -1\frac{1}{7} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{2}{7} & 2 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=-x^7-x^6+8x^5+8x^4-16x^3-12x^2+8x \qquad x_1=0 \qquad x_2=-2$$
$$=(-x^3+x^2+4x-2)(x^2-2)(x+2)\,x$$

T(max)=T(3)

<u>q=93:</u> $g=9 \quad g_1=7 \quad (31)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=-x^7-2x^6+7x^5+11x^4-13x^3-13x^2+1$$

T(max)=T(2)

q=95: $g=9 \quad g_1=8 \quad (19)$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{11} & -2\frac{7}{11} & \frac{8}{11} & -\frac{9}{11} & -1\frac{2}{11} & -\frac{9}{11} & -1\frac{10}{11} & -1\frac{5}{11} \\ -2\frac{8}{11} & 1\frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & -1\frac{1}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{8}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{8}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & -1\frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ -1\frac{4}{11} & \frac{10}{11} & \frac{9}{11} & -1\frac{6}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{5}{11} & 1\frac{8}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(x)=x^8+x^7-11x^6-7x^5+37x^4+9x^3-35x^2+9x^1 \qquad x_1=0$$

T(max)=T(2)

q=97: $g=g_1=7$

$$T(2): \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -1\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2\frac{1}{3} & 2\frac{1}{3} & -1 & -2 & -2 & 2\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -3\frac{5}{6} & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 2 & -3\frac{2}{3} & -1\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(x)= -x^7-x^6+10x^5+8x^4-23x^3-15x^2+9x-1$$

T(max)=T(4)

q=101: $g=g_1=8$

$$T(2):\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{23}{27} & \frac{4}{27} & 1\frac{1}{9} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} & -\frac{13}{27} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{7}{9} & 1\frac{16}{27} & -1\frac{11}{27} & -1\frac{5}{9} & -1\frac{19}{27} & \frac{4}{27} & -\frac{25}{27} \\ -1\frac{2}{9} & 1\frac{5}{9} & -\frac{14}{27} & -\frac{14}{27} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{27} & \frac{10}{27} & -\frac{22}{27} \\ 1\frac{1}{3} & -1\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & 2\frac{7}{9} & -\frac{2}{3} & -1\frac{1}{9} & -1\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=x^8-13x^6+2x^5+47x^4-16x^3-43x^2+14x \qquad x_1=0$$

T(max)=T(3)

q=103: $g=g_1=8$

$$T(2):\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & -1\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} & 2\frac{3}{14} & -1\frac{3}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{13}{14} & 1\frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{9}{14} & -\frac{4}{7} & \frac{11}{28} & -\frac{2}{7} & -\frac{23}{28} & -1\frac{5}{14} & 1\frac{1}{28} & -\frac{11}{14} \\ -1\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -2\frac{3}{14} & 3\frac{3}{7} & -\frac{9}{14} & \frac{13}{14} & -2\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\chi(x)=x^8-x^7-12x^6+10x^5+41x^4-26x^3-46x^2+17x+11$$

T(max)=T(2)

q=107: $q=g_1=8$

$$\begin{pmatrix} o & 1 & o & o & o & o & o & o \\ 2 & o & o & 1 & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o & 1 & o & o \\ o & 2 & o & o & o & o & o & 1 \\ -3,1 & -2,2 & -1,5 & o,7 & o,4 & 2,6 & -o,9 & -3,2 \\ 1,2 & o,4 & 1 & o,6 & o,2 & -1,2 & -o,2 & o,4 \\ o,4 & -o,2 & o & -o,8 & o,4 & -1,4 & -o,4 & -o,2 \\ -1,4 & -o,8 & o & o,8 & -o,4 & o,4 & -o,6 & -o,8 \end{pmatrix}.$$

$X(x)=x^8+2x^7-7x^6-12x^5+15x^4+16x^3-14x^2-4x+3$ $\quad x_1=1$

T(max) T(2)

L i t e r a t u r :

M. Eichler — Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen.

Birkhäuser Verlag 1963

[2] Ueber die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen.

Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 195 (Berlin 1955)

Zur Zahlentheorie der Quaternionenalgebra,

ebenda

E. Hecke — Modulfunktionen und Diriclet-Reihen mit Produktentwicklung.

Math. Annalen, Band 114 (Berlin 1937)

H. Gupta — On the class-numbers of binary quadratic forms.

Univ. Vac. Tucuman Revista A 3, 1942

Curriculum vitae

Am 11. April 1943 wurde ich, Hans Frey, als Sohn des Walter Frey (Dr. chem.) und der Anita Frey, geb. Müller, in Basel geboren. Dort besuchte ich von 1954 bis 1962 das Humanistische Gymnasium und erhielt im Frühling 1962 das Maturazeugnis. Danach immatrikulierte ich mich an der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel. Im Hauptfach studierte ich Mathematik, im Nebenfach Physik und Astronomie. Daneben habe ich mich auch noch mit Philosophie und Musik befasst. Vorlesungen und Seminarien besuchte ich

- in reiner Mathematik bei den Herren Professoren M. Eichler, W. Habicht, H. Huber und B. Scarpellini,
- in Physik bei den Herren Professoren K. Alder, P. Huber, P. Scherrer und H.R. Striebel,
- in Astronomie bei Herrn Professor W. Becker und
- in Philosophie bei den Herren Professoren K. Rossmann und H. Salmony.

Im Herbst 1964 bestand ich das Vordiplomexamen; im Frühjahr 1968 das Diplomexamen in Mathematik.

In den Jahren 1969-1971 habe ich auch Mathematikunterricht am Gymnasium Münchenstein gegeben; daneben erwarb ich mir im Frühling 1970 das Oberlehrerdiplom.

Die Dissertation habe ich unter der Leitung von Herrn Professor Dr. M. Eichler angefertigt, dem ich für seine wertvollen Ratschläge und Anregungen zu grossem Dank verpflichtet bin.